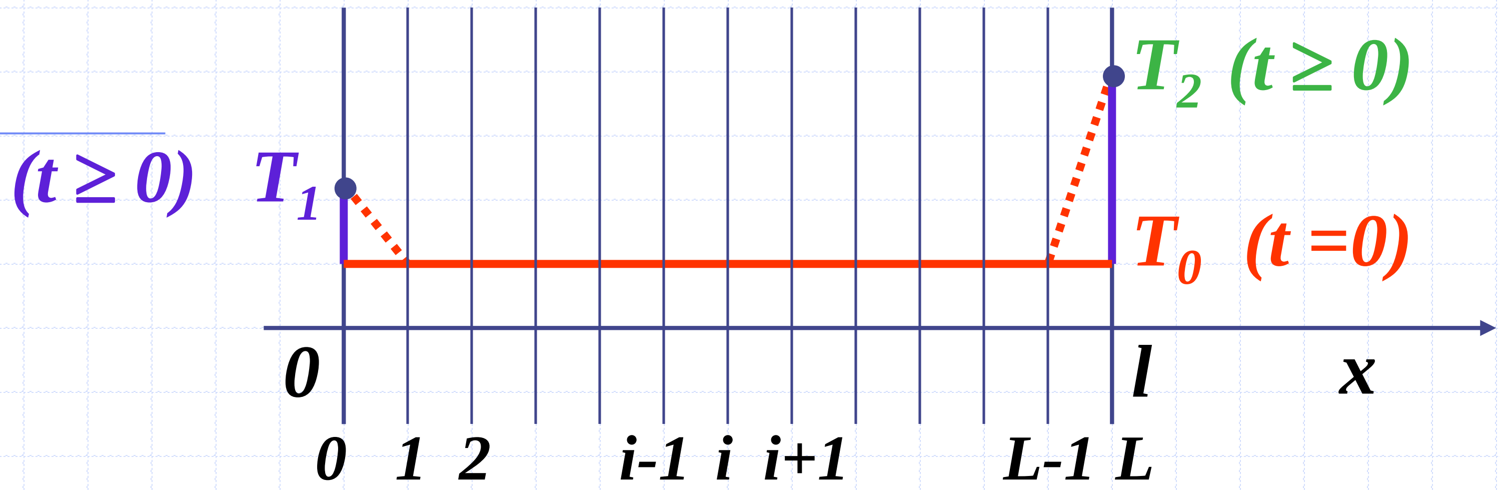
Лекция 8

Явные конечно-разностные схемы

- это КРС, в которых значение искомой функции на неизвестном слое явно выражается через значения этой функции на известных слоях

Постановка задачи



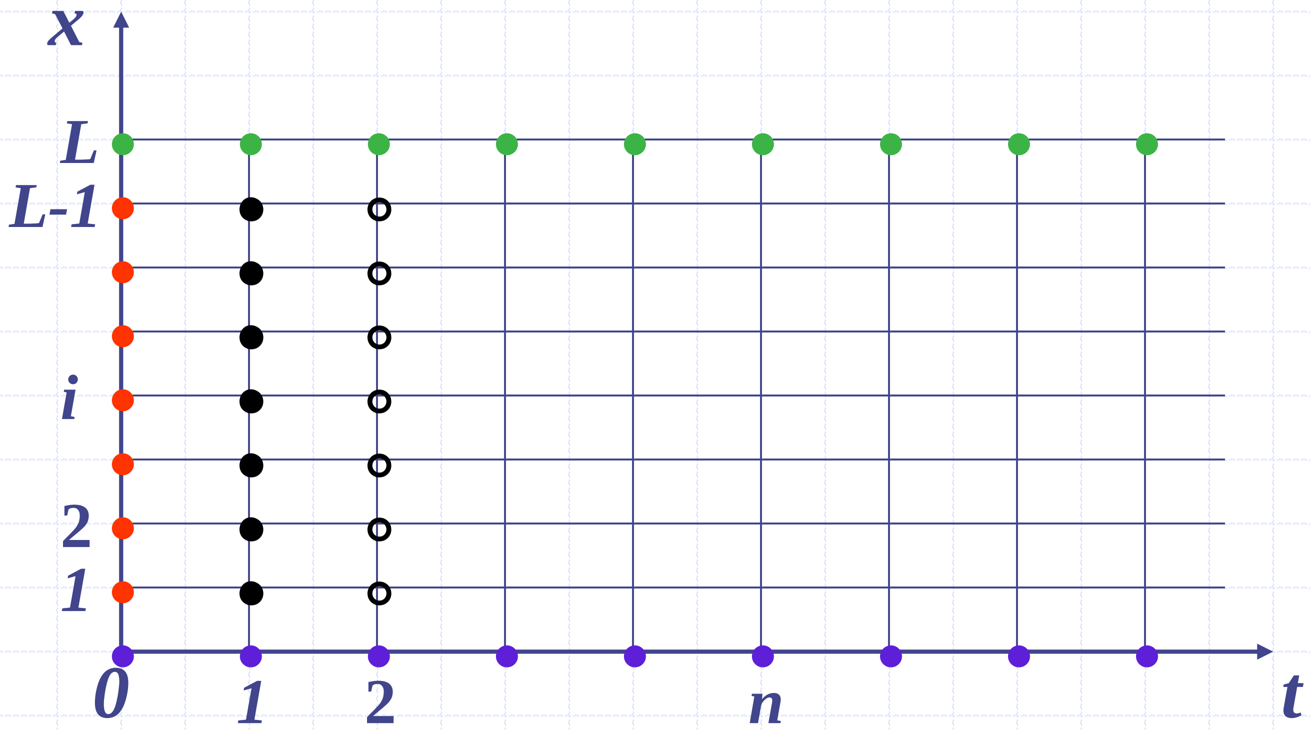
$$\frac{dT}{dt} + u\frac{dT}{dx} = a\frac{d^2T}{dx^2} \quad (1)$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u\frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} = a\frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n}{\Delta x^2} \quad (2)$$

$t=0,\ 0<x<l:$	$T=T_0$	$T_i^0=T_0$	$i = 1, 2, 3, \ldots, L-1$
$t\geq 0,\ x=0:$	$T=T_1$	$T_0^n=T_1$	$n = 0, 1, 2, \ldots$
$x=l:$	$T=T_2$	$T_L^n=T_2$	$n = 0, 1, 2, \ldots$

Конечно-разностная сетка

- T_0
- T_1
- T_2



Алгоритм расчета по явной схеме

1. Выражение для искомой функции на неизвестном слое:

$$T_i^{n+1} = T_i^n - \frac{C}{2}\left(T_{i+1}^n - T_{i-1}^n\right) + d\left(T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n\right)$$

2. Анализ КРС на устойчивость:

1. $\Delta x \le \dfrac{2a}{u}$ **2.** $\Delta t \le \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta x^2}{a}$ **3.** $\Delta t \le \dfrac{\Delta x}{u}$ **4.** $\Delta t \le \dfrac{1}{\dfrac{a}{\Delta x^2} + \dfrac{u}{2\Delta x}}$

3. Определение шагов *Δx* и *Δt* из условий устойчивости.

Пусть ***u=0,1 м/с;*** ***a=2·10⁻⁵м²/с***

1. $\Delta x \le \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{0{,}1} = 4 \cdot 10^{-4}\,м$ **Пусть** $\boxed{\Delta x = 3 \cdot 10^{-4}\ м}$

2. $\Delta t \le \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta x^2}{a} = \dfrac{\left(2\cdot 10^{-4}\right)^2}{2\cdot 2\cdot 10^{-5}} = \dfrac{4\cdot 10^{-8}}{4\cdot 10^{-5}}$ **$=10^{-3}$ с**

Самое жесткое условие

3. $\Delta t \le \dfrac{\Delta x}{u} = \dfrac{2\cdot 10^{-4}}{10^{-1}}$ **$=2\cdot 10^{-3}$ с**

4. $\Delta t \le \dfrac{1}{\dfrac{a}{\Delta x^2} + \dfrac{u}{2\Delta x}} = \dfrac{1}{\dfrac{2\cdot 10^{-5}}{\left(2\cdot 10^{-4}\right)^2} + \dfrac{10^{-1}}{2\cdot 2\cdot 10^{-4}}} =$

$= \dfrac{1}{0{,}5\cdot 10^{3} + 0{,}25\cdot 10^{3}} = \dfrac{1}{0{,}75\cdot 10^{3}}$ **$=1{,}33\cdot 10^{-3}$ с**

Таким образом: $\boxed{\Delta t \le 10^{-3}\ c}$

4. Ошибка аппроксимации:

(2): $$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}+u\frac{T_{i+1}^n-T_{i-1}^n}{2\Delta x}=a\frac{T_{i+1}^n+T_{i-1}^n-2T_i^n}{\Delta x^2}$$

$$T_i^{n+1}\approx T_i^n+\frac{dT}{dt}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{d^2T}{dt^2}\Delta t^2 \Rightarrow \frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}\approx\frac{dT}{dt}+\frac{1}{2}\frac{d^2T}{dt^2}\Delta t$$

$$\left.\begin{aligned} T_{i+1}^n &\approx T_i^n+\frac{dT}{dx}\Delta x+\frac{1}{2}\frac{d^2T}{dx^2}\Delta x^2 \\ T_{i-1}^n &\approx T_i^n-\frac{dT}{dx}\Delta x+\frac{1}{2}\frac{d^2T}{dx^2}\Delta x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} T_{i+1}^n-T_{i-1}^n &\approx 2\frac{dT}{dx}\Delta x \\ T_{i+1}^n+T_{i-1}^n &\approx 2T_i^n+\frac{d^2T}{dx^2}\Delta x^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dT}{dt}+\frac{1}{2}\frac{d^2T}{dt^2}\Delta t+u\frac{dT}{dx}\frac{\cancel{2\Delta x}}{\cancel{2\Delta x}}=\frac{a}{\cancel{\Delta x}}\left(\cancel{2T_i^n}+\frac{d^2T}{dx^2}\Delta x^{\cancel{2}}-\cancel{2T_i^n}\right)$$

$$\frac{dT}{dt}+u\frac{dT}{dx}=a\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{1}{2}\frac{d^2T}{dt^2}\Delta t$$ **- ср. с уравнением (1)**

$$\alpha_\Delta=-\frac{1}{2}\frac{d^2T}{dt^2}\Delta t$$ **- ошибка аппроксимации**

$\alpha_\Delta \to 0$ при $\Delta t \to 0$ $\Rightarrow$ - КРС аппроксимирующая

5. Определение искомой функции на неизвестных слоях:

n=1: $t_1 = \Delta t$

i=1: $$T_1^1 = T_1^0 - \frac{C}{2}\left(T_2^0 - T_0^0\right) + d\left(T_2^0 + T_0^0 - 2T_1^0\right)$$

i=2: $$T_2^1 = T_2^0 - \frac{C}{2}\left(T_3^0 - T_1^0\right) + d\left(T_3^0 + T_1^0 - 2T_2^0\right)$$

…

i=L-1: $$T_{L-1}^1 = T_{L-1}^0 - \frac{C}{2}\left(T_L^0 - T_{L-2}^0\right) + d\left(T_L^0 + T_{L-2}^0 - 2T_{L-1}^0\right)$$

n=2, i=1, 2, …, L-1 $t_2 = t_1 + \Delta t$

…

6. Конец расчета:

$t_{n+1} > t_{кон}$ **или** $|T_i^{n+1} - T_i^n| < \varepsilon$

Явная схема “чехарда”

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} = a\frac{f_{i+1}^{n} + f_{i-1}^{n} - 2f_i^{n}}{\Delta x^2}$$

$$f_i^{n} = \frac{1}{2}\left(f_i^{n+1} + f_i^{n-1}\right)$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} = a\frac{f_{i+1}^{n} + f_{i-1}^{n} - f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{\Delta x^2}$$

$$f_i^{n+1} = \frac{f_i^{n-1} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}\right) + \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1}^{n} + f_{i-1}^{n} - f_i^{n-1}\right)}{1 + \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}}$$